MIIA – Präsenzaufgaben Nr. 3
9.5 – 11.5.2007

1. Kann ein 0-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum als normierter Raum gelten?

2. Seien X, Y metrische Räume mit den Metriken d_X, d_Y. Durch

   $$\Delta\left((x,y),(x',y')\right) := d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$

   wird eine Metrik auf dem Produkt $X \times Y$ definiert, welche (wie auch $\max\{d_X, d_Y\}$, vgl. Vorlesung) die Produkttopologie erzeugt. Beweis.

3. Jede Linearform (i.e. $\mathbb{K}$-lineare Abbildung) $\alpha : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist stetig bezüglich der natürlichen Topologien auf $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}$.

4. Daraus folgere man: Jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stetig. Hinweis: Man verwende die Charakterisierung von stetigen Funktionen von X in ein endliches Produkt von topologischen Räumen.

5. Man zeige für stetige $f_i : X_i \to Y_i\,, i = 1, 2$, dass die Abbildung

   $$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2\ ,\ \ (u,v) \mapsto (f_1(u), f_2(v))\,,$$

   stetig ist.

6. Beweisen Sie, dass mit $f, g : X \to \mathbb{K}$ auch $f + g$ und fg stetig sind (22.21). Hinweis: Man kann es mit dem vorangehenden Resultat und Komposition versuchen, auch wenn der direkte Beweis (Dreiecksungleichung!) nicht schwer ist.

7. Man folgere, dass Polynomfunktionen $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig sind.

8. Man bestimme den Rand von folgenden Teilmengen Z von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

   - $Z = \mathbb{S}; Z = \mathbb{E}; Z = \mathbb{C}\backslash\mathbb{E}; Z = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}$
   - $Z = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
   - $Z = [0,1] \times [0,1[; Z = \{0,1\} \times [0,1[$
   - $Z = \{3^{-n} \,|\, n \in N\} \times \{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n} \,|\, a_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}\}$